Selected Quantitative Methods

Lecture 3

(Binomial) Logistic Regression

Harry B.G. Ganzeboom

VU-FSW Master Social Research

September 14-16 2011

Wanneer gebruik je logistische regressie?

- **OLS regressie**→ afhankelijke variabele op interval/ratio niveau

- **Logistische regressie** wordt gebruikt wanneer de afhankelijke variabele **dichotoom** is **(0-1)**
- Voorspellen van **de kans P** op een bepaalde gebeurtenis via een **kansverhouding [odds]** en een **logit [log odds]**.
- Verder: veel hetzelfde als bij OLS regressie

Logistic regression

- We start by studying binomial logistic regression, which relates a binary (0,1) Y-variable to a linear (additive) specification of the X-variables.
- The changes relative to OLS regression are all in the Y-part:
  - The model is linear in **logits**.
  - The estimation procedure is entirely different. In particular it is **iterative**.
  - Variance, sum-of-squares and fit statistics are entirely different from OLS regression.
  - Direct and indirect effects are also complicated.

Various forms

- The binomial logistic regression is not only frequently used in research practice (any variable can be dichotomized!), but it is also a necessary first step to other, more complicated (and sometimes more informative and more powerful) models for discrete Y-variables.
  - Multinomial logistic regression (Y has more than 2 categories).
  - Ordered logistic regression (Y has more than 2 categories which can be ordered). This model is often used for education as an outcome.
  - Conditional logistic regression (Y has (many) more than 2 categories, which can be scaled on multiple dimensions. This model is very interesting for e.g. political party choice, occupational choice.

Het lineaire probabiliteitsmodel

- Het is goed mogelijk om de kans P op een bepaalde gebeurtenis te voorspellen met gewone (OLS) regressie: het ‘lineaire probabiliteitsmodel’.
- Dit stuit wel op een aantal problemen:
  - Het kan leiden tot onmogelijke verwachte waarden (< 0 of > 1.0).
  - Dichotome afhankelijke variabelen leiden noodzakelijk tot heteroskedasticiteit, namelijk geringe residuele variantie bij de extremen van de regressielijn.
  - Mede om deze reden kloppen de inferentieel statistische conclusies (standard errors, significantie) niet.
- Dit is allemaal ernstig bij zeer scheef verdeelde afhankelijke variabelen (gemiddelde / verwachte P dichtbij 1 of 0).

More on OLS for binary Y

- These often stated reasons to do logistic analysis are in practice not so relevant.
  - Negative expected values are in practice rare, and even if so: so what?
  - OLS significance tests are in practice very close to their logistic counterparts.
- ***Do not tell anybody***, but I recommend strongly to run an OLS on your problem before you start doing logistic.
- There is a much better reason to prefer logistic over OLS: logistic regression coefficients are ***insensitive to marginal distributions***. This is very important in practical problems of comparative research (between countries, between periods).

Kansen, kansverhouding, logit –1

- Afhankelijke variabele is **kans op een gebeurtenis.**
- **Kans** op categorie 1 is **P**; kans op categorie 0 is **1-P**
- **Kansverhouding** (**Odds**) is **P/(1-P).**
- **Logit: ln(P/(1-P).**

Logaritmes - 1

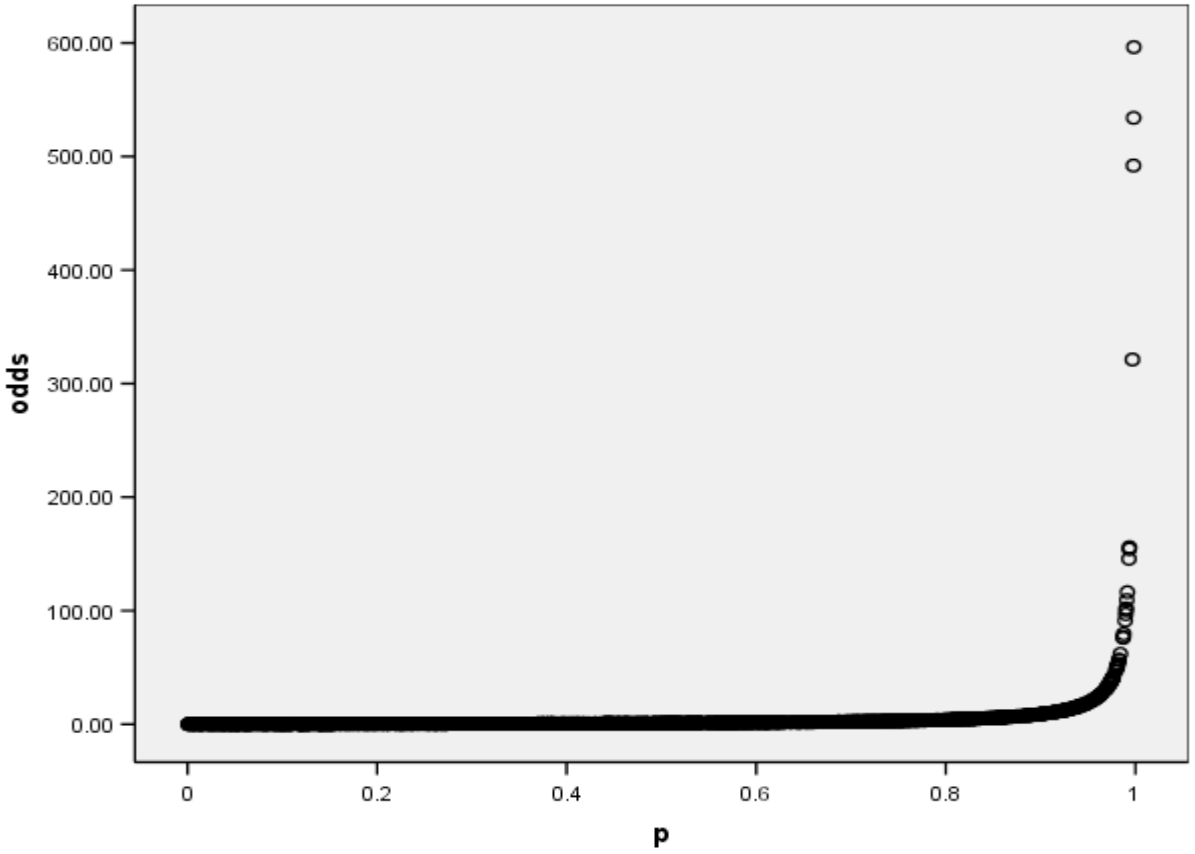
- Logaritme X: tot welke **macht** moet je een **grondtal** verheffen om X te verkrijgen. Zie bv.: http://nl.wikipedia.org/wiki/Logaritme.
- Grondtal 10: $^{10}\log(100)=2$
- Grondtal 2: $^{2}\log(64) = 6$.
- Grondtal e = exp = 2.718: $^{e}\log(100) = \ln(100) = 4.61$.
- Ln(a*b) = ln(a)+ln(b)
- exp(a+b) = exp(a)*exp(b)
- Ln(exp(a+b)) = a+b
- Vermenigvuldigen → optellen
- Delen → Aftrekken
- Machtverheffen → vermenigvuldigen of delen

Logaritmes - 2

- Ln (2.718) = 1
- Ln (2) = .69
- Ln (1) = 0
- Ln (.5) = -.69
- Ln (0) = infinity = undefined

- Exp(1) = 2.718
- Exp(0) = 1

P versus odds



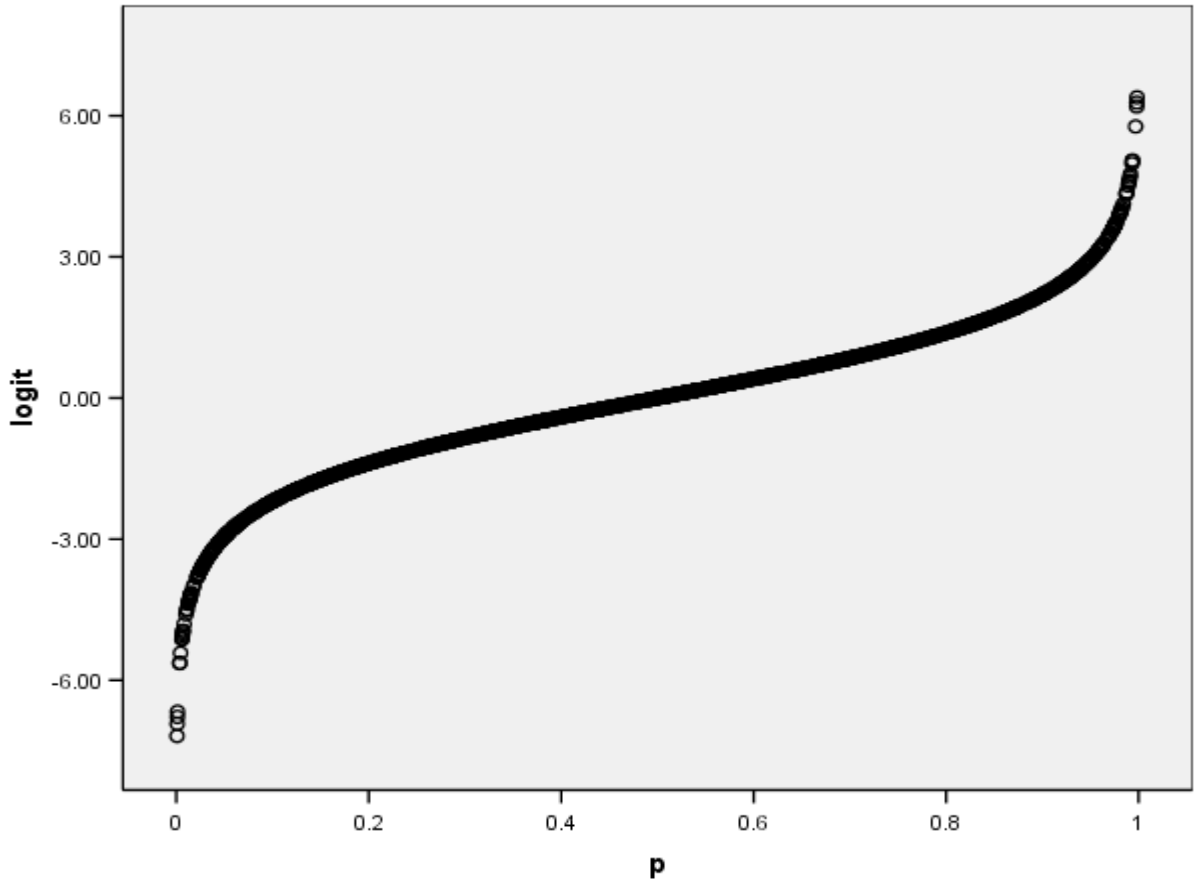
P	odds	logit
0.90	9.00	2.20
0.80	4.00	1.39
0.70	2.33	0.85
0.60	1.50	0.41
0.50	1.00	0.00
0.40	0.67	-0.41
0.30	0.43	-0.85
0.20	0.25	-1.39
0.10	0.11	-2.20
0.09	0.10	-2.31
0.08	0.09	-2.44
0.07	0.08	-2.59
0.06	0.06	-2.75
0.05	0.05	-2.94
0.05	0.05	-2.94
0.04	0.04	-3.18
0.03	0.03	-3.48
0.02	0.02	-3.89
0.01	0.01	-4.60

P versus Odds

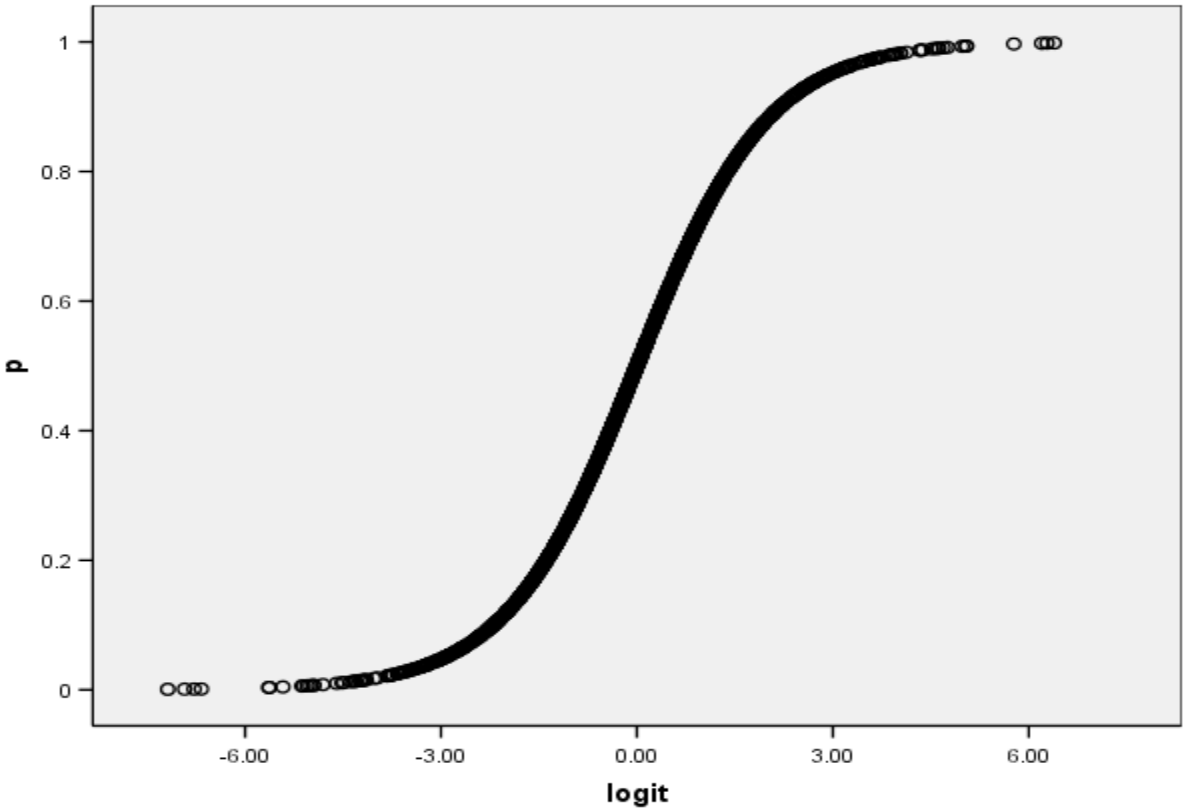
- Note that for P < .10, P is very close to the odds.
  - P = .05 → odds = .05/.95 = .052
  - P = .10 → odds = .10/.90 = .111
- But:
  - P = .50 → odds = .50/.50 = 1.00

→ For small effects, the exponentiated coeffients give the same effects on odd and on P.

P versus logit (ln transformatie)



Logit versus P



Kans, kansverhouding en logits - 2

- **Logit** is de natuurlijke logaritme (**ln**) van de odds: **logit= ln(P/(1-P))**
- **DUS:**
- Omzetten van logits naar odds: **exp(logit) → odds**
- Omzetten van odds naar logits: **ln(odds)→ logit**
- Omzetten van logit /odds naar P:

  P = 1 / (1+exp(-logit))

  P = odds / (1+odds)

  These transformations are available in SPSS as ‘predicted value’.

Odds and odds-ratio’s

- Many, many people confuse odds and odds-ratio.
- Odds is a ratio of two (complementary) probabilities.
- Odds-ratio is a ratio of two odds.
- Odds is a attribute of one variable.
- Odds-ratio is a relationship between two variables.

Invariance of odds-ratio's

- Odds ratio's are insensitive to marginal weights.
- This is of immense importance in "case-control" studies
- As well as in comparative studies of changes / differences, e.g. voting, occupation, and many other things.

Invariance of odds-ratio’s

100	50		0.50		4.00
50	100		2.00		
1000	500		0.50		4.00
50	100		2.00		
100	500		5.00		4.00
50	1000		20.00		

Studerend in ISSP 2006 (1)

- Voorbeeld: studerend in ISSP2006. Data voor leeftijd 18-64, N=1575. Gemiddelde is 3.2%, oftewel .032.
- Student zijn is zeer sterk gedifferentieerd naar leeftijd. Het komt eigenlijk alleen bij jonge mensen voor.
- OLS Model: STUDENT = 0.239 - .0047 * AGECAT.
- De slope is zeer significant: t = 12.8.
- Data worden zeer slecht gerepresenteerd door het lineaire probabiliteitsmodel; verwachte kans op student zijn voor ouderen wordt negatief (-4%).

Studenten in ISSP 2006 - 2

- Logistisch model:
  - Logit(STUDENT) = 5.310 – 0.269 * AGECAT.
- Geëxponentieerd:
  - Odds(STUDENT) = exp(5.310 – 0.269 * AGECAT).
  - Odds(STUDENT) = exp(5.310)*exp(-.269*AGECAT)
- In kansen:
  - STUDENT = 1/(1+exp(-logit))
- LET OP: T-waarde = 9.3 (anders/kleiner dan bij OLS!)

Studenten in ISSP 2006 - 3

		Observed	verwachte waarden			
AGE	N	Data	OLS	LOGIST	ODDS	LOGIT
19	22	0.682	0.150	0.549	1.219	0.198
22	54	0.389	0.136	0.352	0.544	-0.609
30	283	0.032	0.099	0.059	0.063	-2.762
40	460	0.007	0.052	0.004	0.004	-5.453
50	385	0.005	0.006	0.000	0.000	-8.143
60	371	0.000	-0.041	0.000	0.000	-10.834

2. Logistische regressie met SPSS

- **`Analyze > regression > binary logistic`**
- Afhankelijke variabele en onafhankelijke variabelen opgeven (meer mogelijheden dan bij multiple regressie, zelfde als bij UNIANOVA)
  - **`Logistic Y with X1 X2`**. [additief, lineair]
  - **`Logistic Y with X1 X2 C1 /cat=C1`**. [+ categorisch]
  - **`Logistic Y with X1 X2 C1 X2*C1 /cat=C1`**. [+interacties]

Tabel ‘Case Processing Summary’

Case Processing Summary

Unweighted Cases [a]		N	Percent
Selected Cases	Included in Analysis	1575	100.0
	Missing Cases	0	.0
	Total	1575	100.0
Unselected Cases		0	.0
Total		1575	100.0

a. If weight is in effect, see classification table for the total number of cases.

Tabel ‘Dependent Variable Encoding’

Dependent Variable Encoding

Original Value	Internal Value
0	0
1	1

Tabel ‘Omnibus Tests of Model coefficients’

Omnibus Tests of Model Coefficients

		Chi-square	df	Sig.
Step 1	Step	187.933	1	.000
	Block	187.933	1	.000
	Model	187.933	1	.000

Tabel ‘Model Summary’

Model Summary

Step	-2 Log likelihood	Cox & Snell R Square	Nagelkerke R Square
1	255.462[a]	.112	.458

a. Estimation terminated at iteration number 9 because parameter estimates changed by less than .001.

Tabel ‘Classification Table’

Classification Table[a]

			Predicted		
			unempl		Percentage
Observed			0	1	Correct
Step 1	unempl	0	1518	7	99.5
		1	35	15	30.0
	Overall Percentage				97.3

a. The cut value is .500

Een paar handigheden

- Codeer je afhankelijke variabele altijd zelf 0/1.
- Bekijk missing values voordat je begint. Logistic kan niets met ‘pairwise’. Evt. dus substitutie toepassen.
- Net zoals bij OLS regressie, is interpretatie eenvoudiger als je X variabelen een 0 bevatten en een gemakkelijke eenheid hebben.
- Afzonderlijke coefficienten kun je op significantie toetsen met t = b/SE.
- Na enige oefening zijn de exp(B) coefficienten gemakkelijker te interpreteren dan de logistische.

Table 'Variables in the Equation':

Variables in the Equation

	B	S.E.	Wald	df	Sig.	Exp(B)
Step[a]: agecat	-.269	.029	84.845	1	.000	.764
Constar	5.310	.783	46.034	1	.000	202.396

a. Variable(s) entered on step 1: agecat.

Logistische en multiplicatieve regressiecoëfficiënten

- **B** geeft de verandering in de logit (=log odds) van de afhankelijke variabele aan bij één eenheid verandering van X. Het model is lineair in de logits.
- **Exp(B)** is de multiplicatieve verandering in de odds met een eenheid verandering van X ten opzichte van odds baseline (=multiplicatieve intercept).
  - Exp(B) < 1: afname van odds
  - Exp(B) > 1: toename van odds
- Bij categorische variabelen kunnen we **exp(B)** interpreteren als een **odds-ratio [OR]** = verhouding tussen twee odds.
- In continuous variables exp(B) denote how much the odds change (multiplicatively), if we move 1 unit of X.

Multiplicatieve coefficienten en de odds-ratio OR

- Odds = exp (B0 + B1*X1)
- Odds = exp(B0)*exp(B1*X1)
- Als X= 0: odds = exp(B0)*exp(0) = exp(B0)
- Als X=1: odds = exp(B0)*exp(B1)
- **Odds Ratio OR**: exp(B0)*exp(B1) / exp(B0) = exp(B1)

Geen gestandaardiseerde B’s

- Anders dan bij OLS heeft logistic geen gestandaardiseerde coefficienten.
- B’s zijn daarom alleen met elkaar vergelijkbaar als hun eenheden vergelijkbaar zijn.
- Wil je toch gestandaardiseerde coefficienten hebben, dan zul je eerst zelf de X-en moeten standaardiseren (=voorzien van vergelijkbare meeteenheid).

Inferentiele statistiek

- Logistic geeft niet de bij OLS gebruikelijke T-toets: t = B/SE. Deze kun je wel zelf berekenen.
- Wald statistic is t^2. Vergelijk met Chi2 of F-tabel met 1, veel vrijheidsgraden. Kritieke waarde: 3.84.
- SE's behoren horen bij logits. Betrouwbaarheids-intervalllen rondom logits zijn symmetrisch, rondom multiplicatieve coefficienten zijn ze asymmetrisch.

3. Logistische regressie met nominale onafhankelijke variabelen

- Bij logistic behoef je niet zelf dummy-variabelen aan te maken by categorische X (het mag wel).
- **`../cat=X1 /contrast(X1)=indicator(1)`** geeft aan dat X1 categorisch is en 1 de referentie-categorie is.
- De output kan behoorlijk verwarrend zijn. Let goed op de “Categorical variable codings”.
- De Wald statistic is nu een test op gezamenlijke bijdrage van de dummy-variabelen.

Tabel ‘Categorical variable codings’

Categorical Variables Codings

			Parameter coding				
		Frequency	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
agecat	19	22	.000	.000	.000	.000	.000
	22	53	1.000	.000	.000	.000	.000
	30	276	.000	1.000	.000	.000	.000
	40	453	.000	.000	1.000	.000	.000
	50	379	.000	.000	.000	1.000	.000
	60	363	.000	.000	.000	.000	1.000

4. Rapporteren van een logistische regressie

- Resultaten van de logistische regressie zowel weergeven
  - in een tabel
  - als in de tekst

- In de tekst ook inhoudelijk interpreteren van de resultaten

Tabel x. Logistische regressieanalyse van kerklidmaatschap op leeftijd, sekse, opleiding, urbanisatiegraad en burgerlijke status (N=4059)

	B	S.E.	Wald	df	P	Exp(B)
Sekse						
Leeftijd						
Opleiding						
Urbanisatiegraad						
Burgerlijke staat **Ongehuwd** **Gescheiden** **Verweduwd**						

Welke zaken in de tekst vermelden?

- **Nagelkerke R^2** = kwaliteit van het model / samenhang
- **OR** = Odds ratio's (% verandering bij eenheidsverandering of verschil tussen twee categorieën)
- **P-waarde** = is het effect van de onafhankelijke variabele significant en op welk niveau ($p < 0,05$; $p < 0,01$; $p < 0,001$)?
- **Voorbeeld** (OR=0,34 ; $p < 0,01$)